

Osservazioni geometriche sull'apprendimento automatico e l'intelligenza artificiale

Patrizio Frosini

Dipartimento di Matematica - Università di Bologna
patrizio.frosini@unibo.it

Research Center Knowledge and Cognition - 6 marzo 2024

Sommario

- 1 Perché questo seminario?
- 2 I GENE0 come rappresentazione geometrica degli osservatori
- 3 Come possiamo usare i GENE0 nelle applicazioni?
- 4 Intelligenza e contraddizione
- 5 Alcuni riferimenti bibliografici sul modello matematico
- 6 Conclusioni

Finalità di questo seminario

Il gioco di parole: “*Osservazioni geometriche*” può essere inteso in due modi:

- Considerazioni di tipo **geometrico**
- La geometria delle **osservazioni**

Entrambi questi significati sono di nostro interesse nella ricerca sull'intelligenza artificiale.

*In questo seminario vorremmo mostrare come la geometria e la topologia rendano disponibili idee e strumenti che potrebbero essere utili per studiare lo **spazio degli osservatori** nella ricerca sull'intelligenza artificiale.*

L'esposizione sarà, per quanto possibile, informale.

Finalità di questo seminario

Le idee principali:

- Lo spazio degli osservatori è spesso più importante dello spazio dei dati;
- Per studiare lo spazio degli osservatori è utile sviluppare un nuovo modello geometrico;
- Lo sviluppo di un nuovo modello geometrico offre dei vantaggi teorici e applicativi.

In altre parole cercherò di illustrare come si possa munire lo spazio degli osservatori di una struttura geometrica, in modo da poterlo studiare e usare in modo più unitario, efficiente e significativo. Si tratta, dunque, di interpretare il concetto di **osservatore come una variabile** nel trattamento e nell'interpretazione dei dati.

Cos'è l'intelligenza?

L'intelligenza può essere descritta come la capacità di percepire o inferire informazioni e di conservarle come conoscenza da applicare a comportamenti adattativi all'interno di un ambiente o contesto.

WIKIPEDIA

(Si veda anche *Sternberg, R. J. & Salter, W. (1982). Conceptions of intelligence. In Sternberg, R. J. (Ed.), Handbook of human intelligence.*)

Ma non tutti i comportamenti adattativi sono intelligenti...



Il ruolo degli osservatori nello studio dell'intelligenza

Ci interessano in particolare queste domande:

- Come è possibile formalizzare il ruolo dell'osservatore in ambito topologico-geometrico?
- Quali sono le principali proprietà topologico-geometriche dello spazio degli osservatori?
- Cosa vuol dire deformare un osservatore e il suo comportamento in relazione ai dati?
- Come è possibile muoversi nello spazio degli osservatori?
- Quali conseguenze può avere lo studio del concetto di osservatore nell'ambito del machine learning?

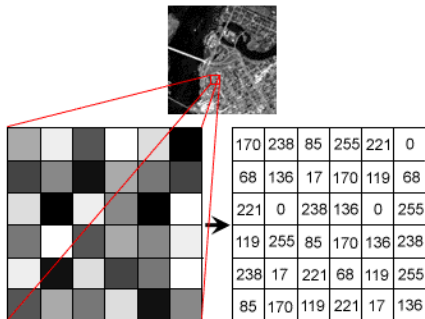
Sommario

- 1 Perché questo seminario?
- 2 I GENE0 come rappresentazione geometrica degli osservatori
- 3 Come possiamo usare i GENE0 nelle applicazioni?
- 4 Intelligenza e contraddizione
- 5 Alcuni riferimenti bibliografici sul modello matematico
- 6 Conclusioni

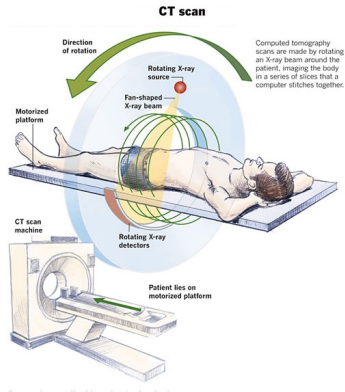
Dati

I dati sono spesso descritti da funzioni a valori reali o vettoriali, cioè leggi che associano agli oggetti dei valori numerici o delle n -uple di valori numerici.

Facciamo alcuni esempi:



IMMAGINI



TOMOGRAFIA ASSIALE COMPUTERIZZATA

Dati

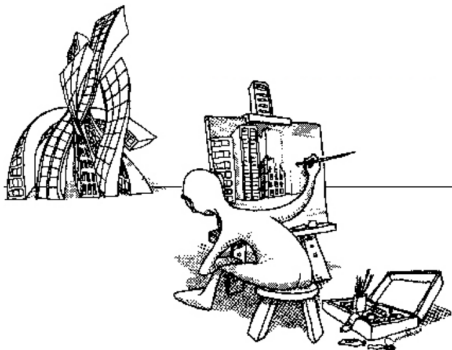
Nel nostro modello i dati sono descritti da funzioni a valori reali o vettoriali.

Indichiamo con Φ l'insieme dei **dati ammissibili**, cioè delle funzioni che possono essere interpretate come segnali da elaborare.

È importante osservare che solo alcune funzioni descrivono dati ammissibili: ad esempio, una funzione dal piano reale ai numeri reali che rappresenti un'immagine a livelli di grigio dovrà assumere valori compresi in un intervallo delimitato. Se questo non accade, la funzione non viene usualmente interpretata come la rappresentazione di un'immagine.

I dati vengono elaborati dagli osservatori

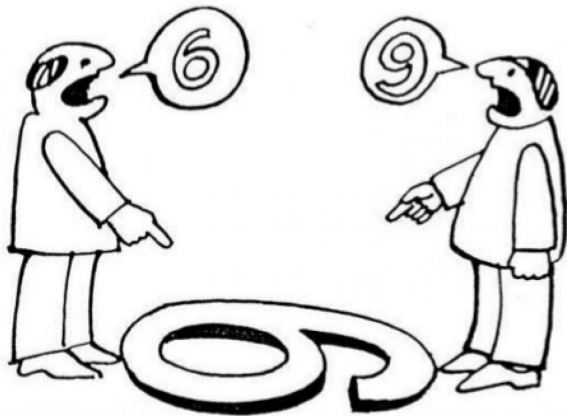
I dati hanno significato solo se c'è un osservatore che li elabora.



Un osservatore è un agente che trasforma dati in altri dati rispettandone le equivalenze e (usualmente) semplificandone la struttura.

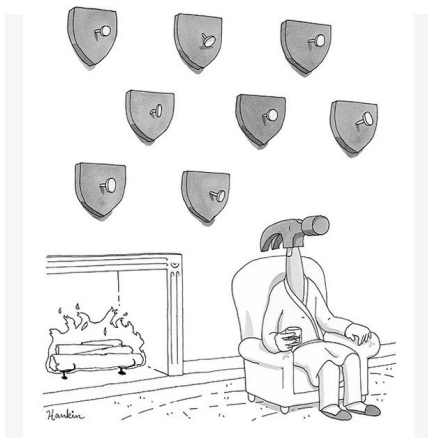
L'osservatore è una variabile del problema

L'interpretazione dei dati dipende fortemente dall'osservatore scelto.



Non c'è alcuna struttura nei dati

In generale, non c'è alcuna struttura nei dati. La struttura dei dati è una proiezione della struttura dell'osservatore.



La coppia (dato, osservatore)

In realtà il nostro interesse non è quasi mai rivolto direttamente ai dati, ma alla relazione fra i dati e l'osservatore. Quel che ci importa è soprattutto il modo in cui l'osservatore reagisce alla presenza di informazioni.



I casi in cui l'interesse per i dati sembra centrale sono quelli in cui la modalità di reazione degli osservatori è tacitamente condivisa. Tutto ciò induce a privilegiare lo studio della “forma degli osservatori” allo studio della “forma dei dati”.

Certe trasformazioni non sono rilevanti

Alcune trasformazioni sono irrilevanti per l'osservatore.



Nel seguito formalizzeremo matematicamente questo fatto.

Un modello matematico per gli osservatori

Gli osservatori possono essere visti come operatori che prendono in ingresso dati e li trasformano. In questo seminario parlerò di approssimazione di osservatori tramite operatori equivarianti non espansivi (in inglese **Group Equivariant Non-Expansive Operators: GENE**O).



Ci interessa particolarmente studiare la geometria degli spazi di osservatori rappresentati da GENE.

Cos'è un gruppo di trasformazioni?

Un **gruppo** è un insieme G i cui elementi si possono comporre tra di loro tramite un'operazione " \circ " verificante queste tre proprietà:

- L'operazione \circ è **associativa**: $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$;
- Esiste un elemento particolare di G , chiamato **unità**, che composto con gli altri non li modifica;
- Per ogni elemento di G ce n'è un altro (detto **inverso**) che composto con il precedente dà l'unità.

ESEMPLI: Gruppo delle traslazioni della retta reale;

Gruppo delle rotazioni del piano intorno a un punto;

Gruppo dei movimenti rigidi dello spazio.

Coppie di percezione

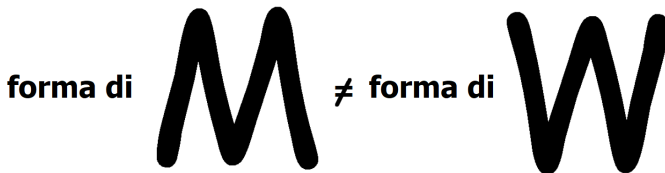
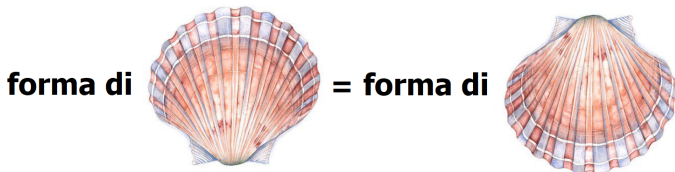
Chiameremo *coppia di percezione* ogni coppia (Φ, G) dove Φ sia uno spazio arbitrario di funzioni che rappresentano dati e G è un gruppo di trasformazioni che preservano Φ .

In parole povere, vogliamo che ogni dato ammissibile venga trasformato da ogni trasformazione in G in un altro dato ammissibile. Per esempio, la traslazione temporale di un elettrocardiogramma è ancora un elettrocardiogramma e la rotazione nel piano della foto di una conchiglia è ancora l'immagine di una conchiglia. Invece la rotazione di 180 gradi dell'immagine di un 6 non è più l'immagine di un 6.



Il gruppo di equivarianza come variabile del modello

Il gruppo di equivarianza varia con l'osservatore:



Operatori equivarianti fra coppie di percezione uguali

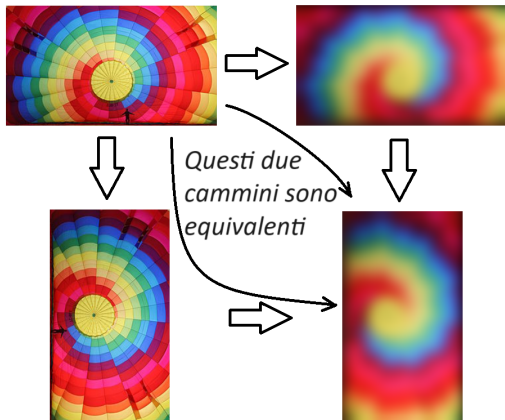
Un **operatore equivariante** dalla coppia di percezione (Φ, G) alla coppia di percezione (Φ, G) (rispetto all'omomorfismo identico da G a G) è una legge che trasforma le funzioni appartenenti all'insieme Φ dei segnali ammissibili in altre funzioni dello stesso spazio, *in modo tale da commutare con le trasformazioni appartenenti al gruppo*. Ciò significa che applicare prima la trasformazione g e poi l'operatore F dà lo stesso risultato che applicare prima l'operatore F e poi la trasformazione g .

$$F(\varphi \circ g) = F(\varphi) \circ g$$

Un osservatore è un operatore che agisce sui dati, trasformandoli in modo equivariante.

Operatori equivarianti fra coppie di percezione uguali

ESEMPIO: L'operatore che sfuoca le immagini è un operatore equivariante rispetto al gruppo delle rotazioni del piano intorno a un punto.



Operatori non espansivi

In molti casi siamo interessati a **operatori non espansivi**, cioè operatori che conservano o fanno diminuire la distanza fra i dati.

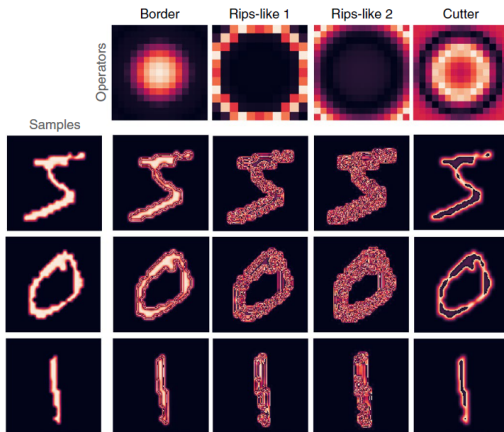
Il motivo è che gli operatori più utili sono quelli che, in un certo senso, semplificano le relazioni fra i dati “dimenticando” parte dell’informazione inizialmente disponibile.

Vogliamo quindi che la distanza fra i dati in uscita sia minore o uguale a quella dei dati in entrata.



Altri esempi di GENE0

**Alcuni operatori equivarianti non espansivi su MNIST
(modified National Institute of Standards and Technology database):**



In sintesi

- I dati si possono spesso interpretare come **funzioni** (p.e., un'immagine a livelli di grigio può essere rappresentata da una funzione dal piano reale nei numeri reali, dove ogni valore definisce il livello di grigio dell'immagine in un punto).
- Un osservatore può essere visto come un **operatore** che trasforma dati in altri dati.
- Gli osservatori interessanti hanno spesso proprietà di **equivarianza**, cioè commutano rispetto all'azione di un gruppo.
- Gli osservatori hanno spesso la proprietà di semplificare le relazioni fra i dati: questo fatto può essere parafrasato dicendo che non incrementano le distanze fra i dati. In questo caso si dicono **non espansivi**.

I GNEO nel machine learning

Abbiamo visto che il confronto di dati non è quasi mai un processo diretto: è quasi sempre mediato dal confronto fra dati prodotti da agenti/operatori tramite opportune trasformazioni dei dati originali.

- L'importanza degli operatori equivarianti nel machine learning è stata evidenziata da vari autori (Mallat, Poggio, Rosasco...)

Un elemento innovativo nella ricerca su questi operatori è costituito dallo sviluppo di tecniche topologiche e geometriche che tengano conto delle peculiarità informative espresse dall'**equivarianza** e dalla **non espansività**.

Non si tratta di studiare tali operatori come entità singole, ma di indagare le proprietà geometriche e topologiche degli spazi di tali operatori.

Alcune proprietà molto utili

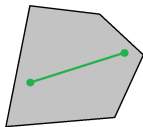
Se gli spazi dei dati sono **compatti**, allora anche lo spazio degli osservatori è **compatto**.



QUINDI

Se gli spazi dei dati sono **compatti** (e dunque approssimabili con un errore arbitrariamente piccolo tramite un insieme finito), allora **lo spazio degli osservatori è approssimabile con un errore arbitrariamente piccolo tramite un insieme finito di osservatori**.

Alcune proprietà molto utili

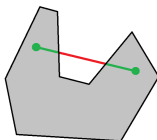


CONVESSO

Se lo spazio dei dati in uscita è **convesso**, allora anche lo spazio degli osservatori è **convesso**.



Se gli spazi dei dati sono **compatti e convessi**, allora anche lo spazio degli osservatori è **compatto e convesso** e dunque ogni funzione di costo strettamente convessa ammette un solo minimo sullo spazio degli osservatori.



NON
CONVESSO

Quindi lo spazio dei GENE0 è particolarmente adatto ai processi di approssimazione e minimizzazione.

Approssimazione di osservatori

IL NOSTRO OBIETTIVO PRINCIPALE: APPROSSIMARE UN OSSERVATORE IDEALE

Nel nostro modello “approssimare un osservatore” significa cercare un GENEIO F che minimizzi un’opportuna “funzione costo” $c(F)$.

La funzione costo quantifica l’errore che si commette prendendo il GENEIO F al posto dell’osservatore ideale.

Dato che lo spazio dei GENEIO è compatto e convesso (sotto l’ipotesi che gli spazi dei dati siano compatti e convessi), se la funzione costo $c(F)$ è strettamente convessa abbiamo che esiste uno e un solo GENEIO che approssima al meglio l’osservatore ideale.

Un'osservazione importante

Mentre molto spesso non ha senso considerare le medie dei dati originali (perché l'insieme dei dati ammissibili è frequentemente non convesso), l'assunzione che il codominio dei GENE0 sia convesso permette di considerare la **media degli osservatori**.



Costruire GENE0

Per poter usare proficuamente il nostro modello abbiamo bisogno di metodi costruttivi per produrre GENE0 in presenza di dati e gruppi di equivarianza prefissati.

Senza entrare in dettagli tecnici, qui ci limitiamo a osservare che sotto ipotesi ragionevoli

- la composizione di GENE0 è ancora un GENE0;
- il massimo fra GENE0 è ancora un GENE0;
- il traslato di un GENE0 è ancora un GENE0;
- la combinazione convessa di GENE0 è ancora un GENE0.

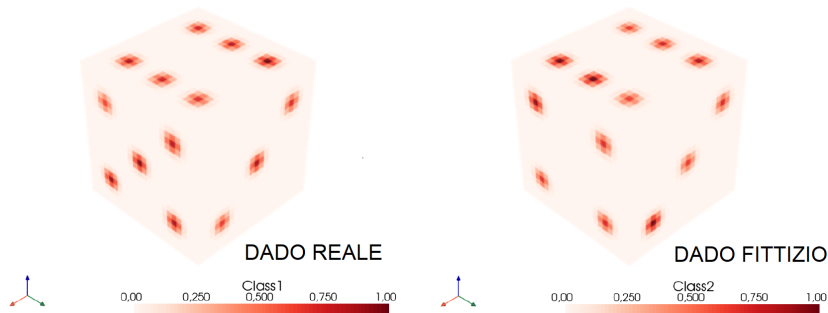
(Ma c'è molto più di questo...)

Sommario

- 1 Perché questo seminario?
- 2 I GENE0 come rappresentazione geometrica degli osservatori
- 3 Come possiamo usare i GENE0 nelle applicazioni?**
- 4 Intelligenza e contraddizione
- 5 Alcuni riferimenti bibliografici sul modello matematico
- 6 Conclusioni

Cosa succede quando applichiamo GENE0 ai dati?

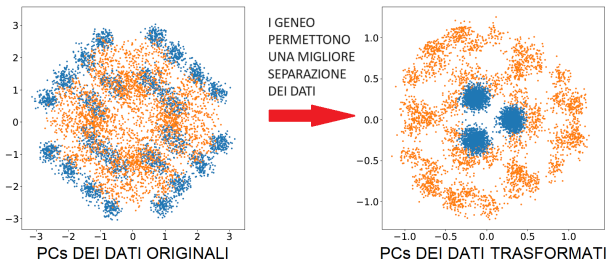
Un esempio di utilizzo: confronto tra dadi veri e dadi falsi.



(Esperimento e calcoli di Giovanni Bocchi)

Cosa succede quando applichiamo GENE0 ai dati?

Abbiamo prodotto 10000 dadi (un training set di cardinalità 7000 e un test set di cardinalità 3000), abbiamo poi applicato la PCA al test set e al test set trasformato da un GENE0 ottimizzato sul training set:



Per ogni matrice vengono riportate le prime due componenti principali. I punti blu sono associati ai **dadi reali**, mentre quelli arancioni a **dadi falsi**. Il GENE0 che utilizziamo è una **combinazione convessa di 3 GENE0 definiti da "misure permutanti"**.

Un'applicazione reale: studio delle proteine

GENEOnet: A new machine learning paradigm based on Group Equivariant Non-Expansive Operators. An application to protein pocket detection.

Giovanni Bocchi¹, **Patrizio Frosini**², **Alessandra Micheletti**¹, **Alessandro Pedretti**³
Carmen Gratteri⁴, **Filippo Lunghini**⁵, **Andrea Rosario Beccari**⁵ and **Carmine Talarico**⁵

¹ Department of Environmental Science and Policy, Università degli Studi di Milano

² Department of Mathematics, Università degli Studi di Bologna

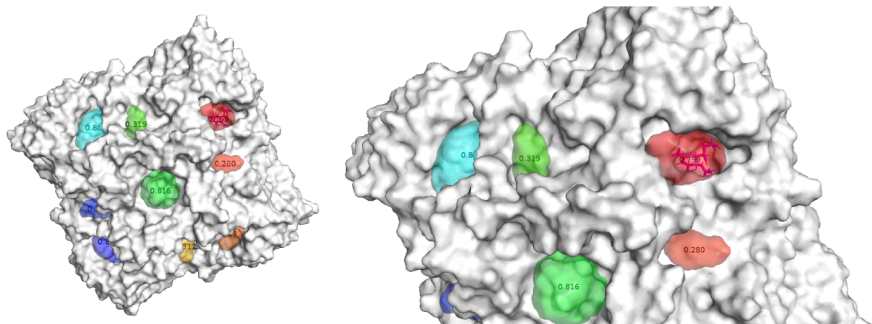
³ Department of Pharmaceutical Sciences, Università degli Studi di Milano

⁴ Dipartimento di Scienze della Salute, Università degli Studi "Magna Græcia di Catanzaro"

⁵ Dompé Farmaceutici SpA

<https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2202/2202.00451.pdf>

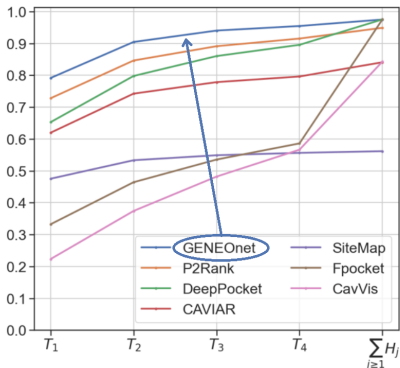
Un'applicazione reale: studio delle proteine



La ricerca delle tasche è stata effettuata identificando un GENE0 ottimale nell'involuppo convesso di 8 GENE0 (ciascuno focalizzato su una particolare proprietà delle tasche).

Un'applicazione reale: studio delle proteine

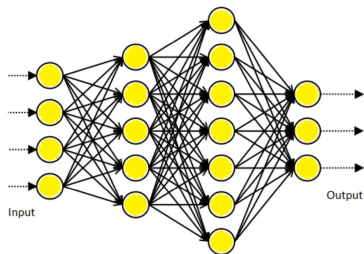
Ecco i risultati dei nostri esperimenti:



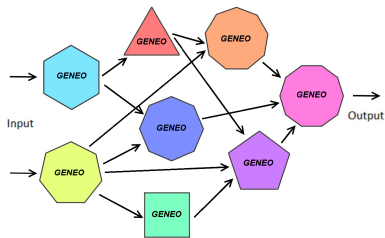
Occorre tenere presente che GENEOnet utilizza 17 parametri, mentre una CNN come DeepPocket richiede 665122 parametri.

Uso dei GENEIO nel Machine Learning

In prospettiva, stiamo cercando di sviluppare una buona teoria compositoriale per costruire reti efficienti di GENEIO. Alcuni esperimenti preliminari suggeriscono che la sostituzione dei neuroni con GENEIO potrebbero rendere il deep learning più trasparente e interpretabile e velocizzare il processo di apprendimento.



RETE NEURALE



RETE DI GENEIO

Sommario

- 1 Perché questo seminario?
- 2 I GENE0 come rappresentazione geometrica degli osservatori
- 3 Come possiamo usare i GENE0 nelle applicazioni?
- 4 Intelligenza e contraddizione**
- 5 Alcuni riferimenti bibliografici sul modello matematico
- 6 Conclusioni

Intelligenza e contraddizione

La rappresentazione operatoriale
del concetto di osservatore
ha un'altra importante conseguenza:
una sorta di «**principio di contraddizione**».



Available online at www.sciencedirect.com



Cognitive Systems Research 10 (2009) 297–315

Cognitive Systems
RESEARCH

www.elsevier.com/locate/cogsys

Does intelligence imply contradiction?

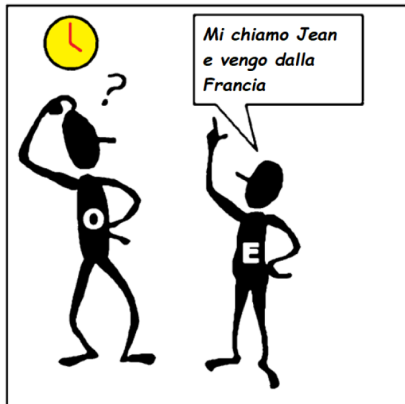
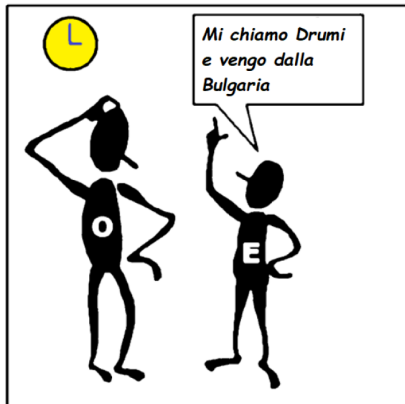
Action editor: Vasant Honavar

P. Frosini *

Department of Mathematics and ARCES, University of Bologna, I-40126 Bologna, Italy

Intelligenza e contraddizione

Cosa intendiamo per contraddizione?



Intelligenza e contraddizione

Teorema: Ogni entità sufficientemente intelligente è contraddittoria.



*Ludwig Josef Johann Wittgenstein
(Vienna, 26 aprile 1889 –
Cambridge, 29 aprile 1951)*

Le sette asserzioni principali

1. Il mondo è tutto ciò che accade.
2. Ciò che accade, il fatto, è il sussistere di stati di cose.
3. L'immagine logica dei fatti è il pensiero.
4. Il pensiero è la proposizione munita di senso.
5. La proposizione è una funzione di verità delle proposizioni elementari.
6. La forma generale della funzione di verità è: $[p, \xi, N(\xi)]$. Questa è la forma generale della proposizione.
7. Su ciò di cui non si può parlare, si deve tacere.

Tractatus Logico-Philosophicus

By
LUDWIG WITGENSTEIN

With an Introduction by
BERTRAND RUSSELL, F.R.S.



NEW YORK
HARCOURT, BRACE & COMPANY, INC.
LONDON: KEGAN PAUL, TRENCH, TRUBNER & CO. LTD.
1922

Intelligenza e contraddizione

In modo equivalente possiamo dire che

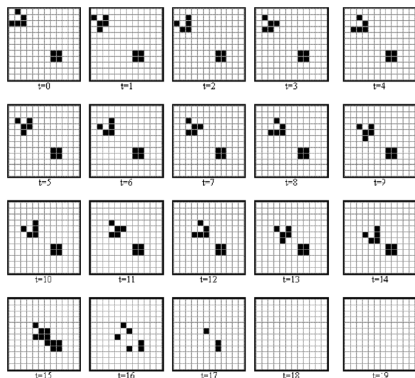
Il comportamento di ogni entità
sufficientemente intelligente è imprevedibile.



Intelligenza e contraddizione

Come dimostrarlo?

È possibile un approccio basato sugli automi cellulari.



Intelligenza e contraddizione

Linea dimostrativa:

- Si individua un osservatore (inteso come un operatore che trasforma le funzioni che rappresentano gli stati dell'automa cellulare in funzioni che descrivono l'entità percepita e l'ambiente che la circonda).
- Si definisce l'intelligenza di una entità come la sua capacità di sopravvivere nell'ambiente secondo il giudizio dell'osservatore.
- Si prova che esiste una soglia per l'intelligenza (dipendente dal numero di stati che l'osservatore può associare all'entità e all'ambiente), oltre la quale l'entità osservata appare **necessariamente contraddittoria** all'osservatore prescelto.

In questo modello, quindi, la contraddittorietà e la non predicibilità non appaiono come limitazioni delle strutture intelligenti ma come condizioni necessarie per lo sviluppo di comportamenti intellettivi complessi.

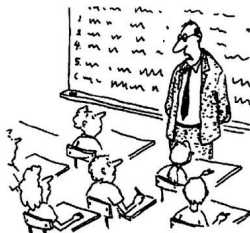
Intelligenza e contraddizione

Teorema. Sia E un'entità avente lunghezza finita di vita e si supponga che il suo ambiente sia deterministico. Se l'intelligenza di E è maggiore del prodotto delle cardinalità degli insiemi P_{ent} e P_{ENV} l'entità E deve essere necessariamente contraddittoria.

ATTENZIONE!: Il teorema non asserisce che le entità intelligenti devono cambiare il loro comportamento (fatto ovvio) ma che devono farlo senza che l'osservatore ne comprenda il motivo.

P_{ent} = insieme degli stati di E
riconosciuti dall'osservatore.

P_{ENV} = insieme degli stati dell'ambiente
riconosciuti dall'osservatore.



Mi aspetto che voi siate autonomi, creativi, critici e che facciate tutto quello che dico io.

Intelligenza e contraddizione

La formalizzazione matematica di questo approccio può essere trovata nell'articolo

P. Frosini, Does intelligence imply contradiction?, Cognitive Systems Research, vol. 10 (2009), n. 4, 297-315.

(Chi lo desidera può trovare una presentazione dell'articolo realizzata da Mattia G. Bergomi al link

<https://mgbergomi.github.io/Contradiction/> e un'introduzione informale all'argomento al link

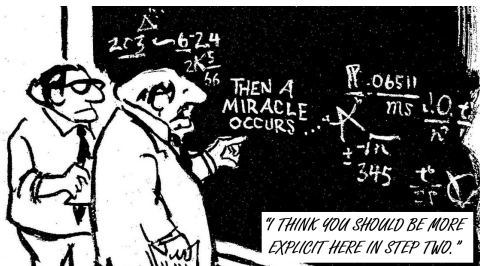
[http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/langolo-arguto/lintelligenza-della-contraddizione/.](http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/langolo-arguto/lintelligenza-della-contraddizione/))

Il preprint dell'articolo è disponibile a questo link:

<https://arxiv.org/pdf/0801.0232.pdf>.

Intelligenza e contraddizione





Abbiamo visto che ogni agente A appare imprevedibile agli occhi di un osservatore prefissato se l' "intelligenza" di A supera una soglia espressa dal prodotto del numero di stati che l'osservatore può percepire nell'agente e nel contesto ambientale. Ciò implica che per avere predibilità di comportamento occorre scegliere modelli in cui la predetta soglia sia più grande del valore di intelligenza desiderato.



Sommario

- 1 Perché questo seminario?
- 2 I GENE0 come rappresentazione geometrica degli osservatori
- 3 Come possiamo usare i GENE0 nelle applicazioni?
- 4 Intelligenza e contraddizione
- 5 Alcuni riferimenti bibliografici sul modello matematico**
- 6 Conclusioni

Towards a topological-geometrical theory of group equivariant non-expansive operators for data analysis and machine learning

Mattia G. Bergomi ¹, Patrizio Frosini ^{2,3*}, Daniela Giorgi ⁴ and Nicola Quercioli ^{2,3}

We provide a general mathematical framework for group and set equivariance in machine learning. We define group equivariant non-expansive operators (GENEOs) as maps between function spaces associated with groups of transformations. We study the topological and metric properties of the space of GENEOs to evaluate their approximating power and set the basis for general strategies to initialize and compose operators. We define suitable pseudo-metrics for the function spaces, the equivariance groups and the set of non-expansive operators. We prove that, under suitable assumptions, the space of GENEOs is compact and convex. These results provide fundamental guarantees in a machine learning perspective. By considering isometry-equivariant non-expansive operators, we describe a simple strategy to select and sample operators. Thereafter, we show how selected and sampled operators can be used both to perform classical metric learning and to inject knowledge in artificial neural networks.

<https://rdcu.be/bP6HV>

Uso dei GENEIO nel Machine Learning

Per maggiori dettagli sull'uso di GENEIO nel Machine Learning:



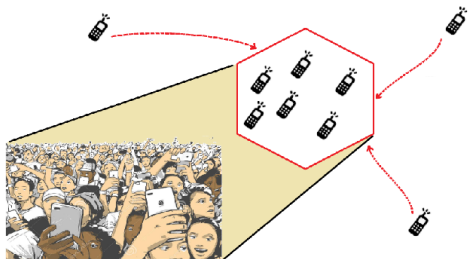
The image shows a screenshot of the EMS Magazine website. The top left features the EMS logo and the text "EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY". A "Login" button is in the top right. A navigation menu includes "News", "Magazine", "Membership", "Services", "Activities", and "Society Overview". The main content area displays an article titled "A new paradigm for artificial intelligence based on group equivariant non-expansive operators" by Alessandra Micheletti, published on 24 April 2023. To the left of the article is a thumbnail image of the magazine cover, which features a blue abstract graphic and the text "EMS Magazine".

- A. Micheletti, *A new paradigm for artificial intelligence based on group equivariant non-expansive operators*, In: *EMS Magazine*, 128 (2023), pp. 4–12.
- <https://ems.press/content/serial-article-files/27673>

Alcuni progetti ricerca

CNIT / WiLab - Huawei Joint Innovation Center (JIC)

Project on GENEOS for 6G



WILAB  **HUAWEI**

Alcuni progetti ricerca



Horizon Europe (HORIZON)

Call: HORIZON-CL4-2023-HUMAN-01-CNECT

Project: 101135775 — PANDORA

Funding: approximately 9 million euros.

Task 3.3 - Leveraging domain knowledge for explainable learning:

This task aims to investigate the use of domain knowledge in the development of explainable AI models. Tools like GENEOS for applications in TDA and ML and new theoretical methods of GENEOS for explainable AI will be used.

Sommario

- 1 Perché questo seminario?
- 2 I GENE0 come rappresentazione geometrica degli osservatori
- 3 Come possiamo usare i GENE0 nelle applicazioni?
- 4 Intelligenza e contraddizione
- 5 Alcuni riferimenti bibliografici sul modello matematico
- 6 Conclusioni**

Conclusioni

- Nella ricerca sull'intelligenza artificiale potrebbe essere interessante spostare l'attenzione dallo spazio dei dati allo spazio degli osservatori.
- Questo cambiamento di prospettiva richiede lo sviluppo di nuovi modelli topologici e geometrici adatti a studiare la "forma" degli spazi di osservatori.
- Abbiamo mostrato come questo approccio ci offra vari risultati potenzialmente utili nella ricerca sull'intelligenza artificiale.

***GRAZIE PER
L'ATTENZIONE***

